Tema 0 – Repaso de Señales y Sistemas Discretos

4º Ing. Telecomunicación

EPS – Univ. San Pablo – CEU

Lecturas complementarias

- Opp. 1, Pro 1(sólo hasta 1.2): Introducción a TDS
  – Importancia de TDS en la ingeniería
  – Perspectiva histórica
  – Esquema de un sistema de TDS
  – Tipos de señales

Lecturas complementarias

- Oppenheim, Willsky. Señales y Sistemas. Prentice-Hall, 1997. Cap. 1, cap. 2 (sólo lo referente a tiempo discreto)

Ejercicios Opp: 2.29, 2.43

Ejercicios Pro: 2.1, 2.2

Señales

- Señal: Algo que lleva info.
- Info contenida en algún patrón de variaciones (ej: voz, vídeo):x(t).
- Convención: variable indep. es t.
- Señales en tiempo discreto x[n]:secuencias.

Opp 2.0

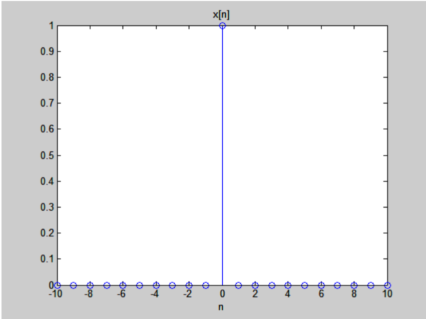
Señales Básicas

Delta de Kronecker

(0.1) $\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$ $\delta[n-n_0]=\begin{cases}0 & n\neq n_0\\ 1 & n=n_0\end{cases}$

(0.2) $x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$

(0.3) $x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$



Cualquier secuencia se puede expresar como una suma ponderada de deltas

(0.4) $$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_k\delta[n-k]$$
$$x_k=x[n=k]$$

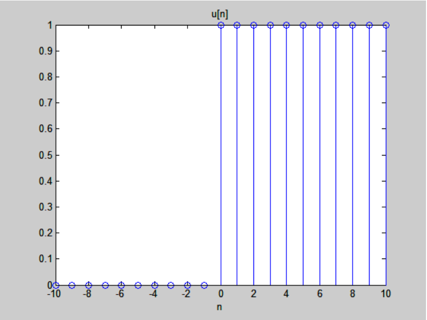
Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1

Señales Básicas

Escalón unidad

(0.5) $u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$

$u[n-n_0]=\begin{cases}0 & n<n_0\\ 1 & n\geq n_0\end{cases}$



Relación con la función delta

(0.6) $u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$

(0.7) $\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

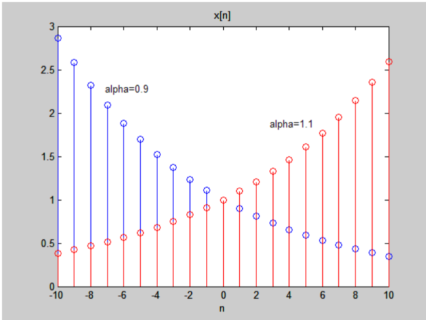
Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1

Ejercicios Pro: 2.3

Señales Básicas

Exponencial real

(0.9) $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$



Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3

Ejercicios Pro: 2.15*

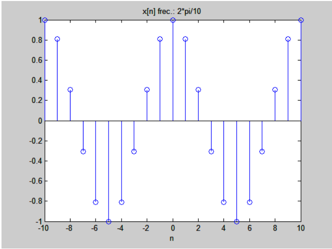
Señales Básicas

<u>Exponencial imaginaria pura</u>

(0.10) $x[n] = Ce^{j\omega_0 n} = C(\cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n)$

(0.11) $\cos\omega_0 n = \mathrm{Re}\{e^{j\omega_0 n}\} = \dfrac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$

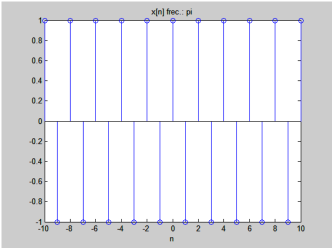
(0.12) $\sin\omega_0 n = \mathrm{Im}\{e^{j\omega_0 n}\} = \dfrac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j}$



$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$ (0.13)

$\left|e^{j\omega_0 n}\right|^2 = 1$ (0.14)

(0.15) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & resto \end{cases}$



Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3

Señales Básicas

Exponencial imaginaria pura

Periodicidad en n

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \omega_0 = 2\pi \frac{m}{N} \in [0, 2\pi) \approx (-\pi, \pi] \qquad (0.16)$$

$$N_0 = \frac{N}{\text{gcd}(m, N)} \qquad (0.17)$$

$$e^{j\omega_1 n} + e^{j\omega_2 n} \longrightarrow N_{1+2} = mcm(N_1, N_2) \qquad (0.18)$$

Periodicidad en w $\omega_1 = 2\pi k + \omega_2 \Rightarrow e^{j\omega_1 n} = e^{j\omega_2 n}$ $\qquad \omega_0 \in [0, 2\pi) \approx (-\pi, \pi]$

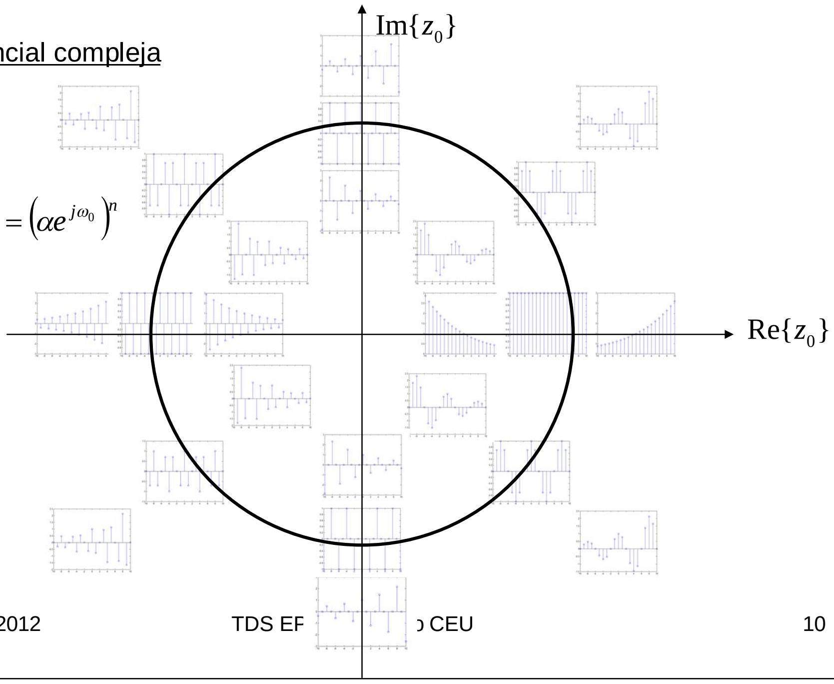
Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3

Ejercicios Opp: 2.28

Señales Básicas

Exponencial compleja

$$x[n] = (z_0)^n = \left(\alpha e^{j\omega_0}\right)^n$$



Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3

Ejercicios Opp: 2.7

Sistemas Básicos

(0.27) Integrador $y[n] = I(x[n]) = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(0.28) Diferencia finita causal $y[n] = D_{-}^{-1}(x[n]) = x[n] - x[n-1]$

(0.29) Diferencia finita no causal $y[n] = D_{+}^{-1}(x[n]) = x[n] - x[n+1]$

$x[n] = D_{-}^{-1}(I(x[n]))$ (0.33)

$x[n] = I(D_{-}^{-1}(x[n]))$ (0.34)

(0.30) Parte par $x_e[n] = Ev(x[n]) = \dfrac{x[n] + x[-n]}{2}$

(0.31) Parte impar $x_o[n] = Odd(x[n]) = \dfrac{x[n] - x[-n]}{2}$

$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$ (0.35)

(0.32) Correlación $\phi_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+m] = x[-m] * y[m]$

Ejercicios Pro: 2.4, 2.5, 2.58, 2.59, 2.60, 2.61

Propiedades Básicas de los Sistemas

(0.19) Sistemas con memoria $y[n] = T(x[n], x[n-1], x[n-2], \ldots)$

(0.20) Sistemas sin memoria $y[n] = T(x[n])$

(0.21) Sistemas invertibles $y[n] = T(x[n]) \Rightarrow \exists T^{-1}(y) : x[n] = T^{-1}(y[n]) = T^{-1}(T(x[n]))$

(0.22) Sistemas causales $y[n] = T(x[n], x[n-1], x[n-2], \ldots)$

(0.23) Sistemas no causales $y[n] = T(x[n], x[n+1], x[n+2], \ldots)$

(0.24) Sistemas estables $|x[n]| < B_x, \forall n \Rightarrow \exists B_T : |T(x[n])| < B_T, \forall n$

(0.25) Sistemas invariantes en el tiempo $y[n] = T(x[n]) \Rightarrow y[n-n_0] = T(x[n-n_0])$

(0.26) Sistemas lineales $T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$

Bibliografía: Opp. 2.2, Pro. 2.2

Ejercicios Opp: 2.23*, 2.30*, 2.55, 2.56, 2.62, 2.63, 2.68

Ejercicios Pro: 2.6, 2.7, 2.8*, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14

Sistemas LTI

(0.36)

Sistema $y[n] = T(x[n])$

(0.37)

Sistema lineal $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$

(0.38)

Sistema LTI $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$

Applet convolución discreta: http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html

Bibliografía: Opp. 2.3, Pro. 2.3

Suma de convolución

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

- Evaluación directa/gráfica (secuencias finitas):
  - Reflexión: h[-k]
  - Para cada n:
  - Desplazamiento: $h[n_0-k]$:
    - n>0: derecha
    - n<0: izquierda.
  - Multiplicación: $v_{n0}=x[k].h[n_0-k]$
  - Suma de todos los productos.
- Evaluación analítica: Ejemplo: $y[n]=u[n]*\alpha^n u[n]=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u[n]$

Curso 2011/2012 TDS EPS-San Pablo CEU 14

Opp:2.3

Ejercicios Opp: 2.2, 2.3, 2.22, 2.24

Ejercicios Pro: 2.16*, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.29, 2.31*, 2.32, 2.33, 2.34, 2.36, 2.37, 2.38, 2.39, 2.45, 2.51, 2.52 2.63, 2.64

Propiedades Sistemas LTI

(0.39)	Conmutatividad	$x[n]*y[n]=y[n]*x[n]$
(0.40)	Distributividad	$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$
(0.41)	Asociatividad	$x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$
(0.42)	Sistemas sin memoria	$h[n]=k\delta[n]$
(0.43)	Sistemas invertibles	$h[n]*h^{-1}[n]=\delta[n]$
(0.44)	Sistemas causales	$h[n]=0 \quad \forall n<0$
(0.45)	Sistemas estables	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert h[n]\rvert < \infty$

Curso 2011/2012 TDS EPS-San Pablo CEU 15

Bibliografía: Opp. 2.4, Pro. 2.3

Ejercicios Opp: 2.1*, 2.10, 2.12, 2.15, 2.18, 2.19, 2.21*, 2.25, 2.35, 2.36, 2.37*, 2.50, 2.60, 2.34*.

Ejercicios Pro: 2.24, 2.35*, 2.40, 2.56, 2.57

Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias finitas

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (0.48)$$

- Método 1: Ecuación de recurrencia

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right) \qquad (0.49)$$

- Método 2: Sol. Homogénea+Sol. Particular

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{N} a_k y_h[n-k] = 0 \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k y_p[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \qquad (0.50)$$

Curso 2011/2012 TDS EPS-San Pablo CEU 16

Bibliografía: Opp. 2.5, Pro 2.4

Ejercicios Opp: 2.39, 2.61

Sol. Ecuación Homogénea

Ejemplo: $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

$$y_h[n]-\frac{3}{4}y_h[n-1]+\frac{1}{8}y_h[n-2]=0$$

$$y_h[n]=z^n$$

$$z^n-\frac{3}{4}z^{n-1}+\frac{1}{8}z^{n-2}=z^{n-2}\underbrace{\left(z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}\right)}_{\text{Polinomio característico}}=z^{n-2}(z-\tfrac{1}{2})(z-\tfrac{1}{4})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} z=0 & Sol.Trivial \\ z=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\boxed{y_h[n]=K_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+K_2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n}$$

Si hay raíces múltiples, supongamos que ¼ es de orden 2, entonces la solución es de la forma

$$y_h[n]=K_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+(K_2+nK_3)\left(\tfrac{1}{4}\right)^n \quad (0.51)$$

Bibliografia: Opp. 2.5, Pro. 2.4

Ejercicios Opp: 2.38

Sol. Particular

Ejemplo: $y_p[n] - \frac{3}{4} y_p[n-1] + \frac{1}{8} y_p[n-2] = x[n] + x[n-1]$

$$x[n] = u[n]$$

$$y_p[n] = Ku[n]$$

$$y_p[n] - \tfrac{3}{4} y_p[n-1] + \tfrac{1}{8} y_p[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

$$Ku[n] - \tfrac{3}{4} Ku[n-1] + \tfrac{1}{8} Ku[n-2] = u[n] + u[n-1]$$

$x[n]$	$y[n]$
K	K'
$KM^n n^p$	$M^n(K_0 n^p + K_1 n^{p-1} + \ldots + K_p)$
$K\cos\omega_0 n$ $K\sin\omega_0 n$	$K_1\cos\omega_0 n + K_2\cos\omega_0 n$

(0.52)

$n = 2$

$$K - \tfrac{3}{4}K + \tfrac{1}{8}K = 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad K = \tfrac{16}{3}$$

$$\boxed{y_p[n] = \tfrac{16}{3} u[n]}$$

Bibliografia: Pro. 2.4

Ejercicios Pro: 2

Solución Ecuación en Diferencias

Ejemplo: $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]$$

$$y_h[n]=K_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+K_2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$

$$y_p[n]=\tfrac{16}{3}u[n]$$

$$y[n]=\left(K_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+K_2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n+\tfrac{16}{3}\right)u[n]$$

n=0 $y[0]=\frac{3}{4}y[-1]-\frac{1}{8}y[-2]+x[0]+x[-1]=1=K_1+K_2+\frac{16}{3}$

n=1 $y[1]=\frac{3}{4}y[0]-\frac{1}{8}y[-1]+x[1]+x[0]=\frac{11}{4}=K_1\frac{1}{2}+K_2\frac{1}{4}+\frac{16}{3}$

$$K_1=-6, K_2=-\tfrac{5}{3}$$

$$\boxed{y[n]=\left(-6\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\tfrac{5}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^n+\tfrac{16}{3}\right)u[n]}$$

Bibliografia: Pro. 2.4

Ejercicios Opp: 2.5*, 2.16

Ejercicios Pro: 2.27, 2.54

Sol. Ecuación de recurrencia

Ejemplo:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \longrightarrow y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

$x[n]=\delta[n]$

Condiciones iniciales: $y[n]=0 \quad n<0$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{n=-2} & y[-2]=x[-2]+\tfrac{1}{2}y[-3]=0 \\
\text{n=-1} & y[-1]=x[-1]+\tfrac{1}{2}y[-2]=0 \\
\text{n=0} & y[0]=x[0]+\tfrac{1}{2}y[-1]=1 \\
\text{n=1} & y[1]=x[1]+\tfrac{1}{2}y[0]=\tfrac{1}{2} \\
\text{n=2} & y[2]=x[2]+\tfrac{1}{2}y[1]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
 & \ldots \\
 & y[n]=x[n]+\tfrac{1}{2}y[n-1]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n
\end{array}\right\} y[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Bibliografía: Opp. 2.5, Pro 2.4

Ejercicios Opp: 2.4

Ejercicios Pro: 2.23, 2.42

Respuesta al impulso

Ejemplo: $y[n]-3y[n-1]-4y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$

$y_h[n]=\left(K_1(-1)^n+K_2(4)^n\right)$

n=0 $y[0]=3y[-1]+4y[-2]+x[0]+2x[-1]=1=K_1+K_2$

n=1 $y[1]=3y[0]+4y[-1]+x[1]+2x[0]=5=-K_1+4K_2$

$K_1=-\frac{1}{5}, K_2=\frac{6}{5}$

$$\boxed{h[n]=\left(-\frac{1}{5}(-1)^n+\frac{6}{5}4^n\right)u[n]}$$

Bibliografia: Pro. 2.4.4

Ejercicios Opp: 2.20, 2.31*

Ejercicios Pro: 2.25, 2.28, 2.30, 2.55

Funciones propias de los sistemas LTI

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z_0^k h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{n-k}=z_0^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{-k}=z_0^n H(z_0)$$

$$x[n]=z_0^n=r^n e^{j\omega n} \tag{0.46}$$

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n]=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n \tag{0.47}$$

Bibliografía: Opp. 2.6

Ejercicios Opp: 2.13*, 2.14*, 2.26, 2.27

.

Representación en Serie de Fourier

$x[n] = x[n+N] \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ (0.53)

$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n}$ $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Pero sólo hay N señales distintas de este tipo

(0.54) $\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n]$ (0.55)

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi_k[n] \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \phi_{-k}[n]}$$

(0.56) (0.57)

Atención: $\boxed{\begin{array}{l} a_{k+N} = a_k \\ a_{-k} = a_{N-k} \end{array}}$ (0.58)

La frecuencia de la exponencial correspondiente al coeficiente a_k es $\omega_k = k\omega_0$

Applet: http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html
http://www.jhu.edu/~signals/listen-new/listen-newindex.htm

Bibliografía: Opp. 2.7, Opp 8.1, Pro. 4.2

i

Propiedades de la Serie de Fourier

Linealidad	$Ax[n]+By[n]$	$\longleftrightarrow$	$Aa_k + Bb_k$	(0.59)
Desplazamiento en el tiempo	$x[n-n_0]$	$\longleftrightarrow$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$	(0.60)
Desplazamiento en frecuencia	$x[n]e^{jk_0\omega_0 n}$	$\longleftrightarrow$	a_{k-k_0}	(0.61)
Conjugación	$x^*[n]$	$\longleftrightarrow$	a^*_{-k}	(0.62)
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$\longleftrightarrow$	a_{-k}	(0.63)
Escalado en el tiempo	$x_M[n]=\begin{cases} x[n/M] & n=Mk \\ 0 & resto \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{M}a_k$	(0.64)
Convolución periódica	$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r]$	$\longleftrightarrow$	$Na_k b_k$	(0.65)
Producto	$x[n]y[n]$	$\longleftrightarrow$	$\sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}$	(0.66)

Applet: http://www.jhu.edu/~signals/dtftprops/indexDTFTprops.htm

Bibliografía: Opp. 2.8, Opp 2.9, Pro. 4.2

Propiedades de la Serie de Fourier

Diferencia finita	$x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow \left(1-e^{-j\omega_0 k}\right)a_k$		(0.67)
"Integración"	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega_0 k}}a_k$		(0.68)
	Sólo es periódica y finita si $a_0 = 0$		(0.69)
Simetrías	$x[n]$ es real $\longleftrightarrow$ $a_k = a_{-k}^*$		(0.70)
	$x[n]$ es real y par $\longleftrightarrow$ a_k es real y par		(0.71)
	$x[n]$ es real e impar $\longleftrightarrow$ a_k es imaginaria pura e impar		(0.72)
	$x_e[n] \longleftrightarrow \mathrm{Re}\{a_k\}$		(0.73)
	$x_o[n] \longleftrightarrow \mathrm{Im}\{a_k\}$		(0.74)
Teorema de Parseval	$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{k=<N>}\lvert a_k\rvert^2$		(0.75)

Curso 2011/2012 TDS EPS-San Pablo CEU 25

Bibliografía: Opp. 2.8, Opp 2.9, Pro. 4.2

Algunas series de Fourier

$$x[n] = \sin(\tfrac{2\pi M}{N} n) = \frac{e^{j\frac{2\pi M}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi M}{N}n}}{2j} \xleftrightarrow{\gcd(M,N)=1} a_M = \frac{1}{2j}, a_{-M} = -\frac{1}{2j} \qquad (0.76)$$

$$\cos(\tfrac{2\pi M}{N} n) \xleftrightarrow{\gcd(M,N)=1} a_M = \frac{1}{2}, a_{-M} = \frac{1}{2} \qquad (0.77)$$

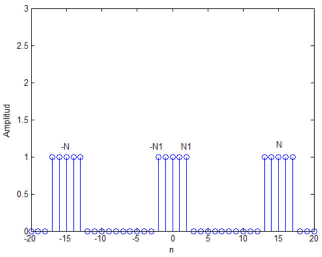
Ejemplo: $1 + \sin(\tfrac{2\pi}{N} n) + 3\cos(\tfrac{2\pi}{N} n) + \cos(\tfrac{4\pi}{N} n + \tfrac{\pi}{2})$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2j} \qquad a_2 = \tfrac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$a_{-1} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2j} \qquad a_{-2} = \tfrac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Bibliografía: Opp I 3.6

Algunas series de Fourier



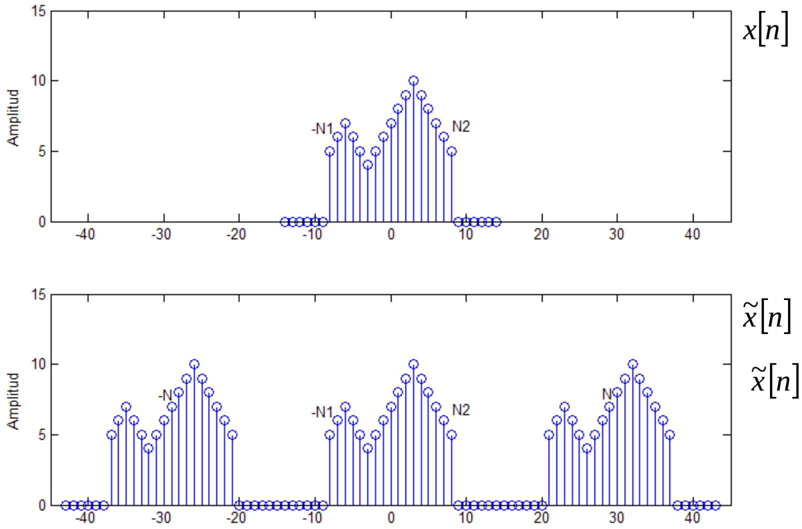
$$\longleftrightarrow \quad a_k = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{N}k(2N_1+1))}{\sin(\frac{\pi}{N}k)} & resto \end{cases} \qquad (0.78)$$

$$x[n] = K \quad \longleftrightarrow \quad a_k = \begin{cases} K & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & resto \end{cases} \qquad (0.79)$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \quad \longleftrightarrow \quad a_k = \tfrac{1}{N} \quad \forall k \qquad (0.80)$$

Bibliografía: Opp I 3.6

Transformada de Fourier



$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k \phi_k[n]$$

Bibliografía: Opp. 2.7, Pro 4.2

Transformada de Fourier

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-j\omega kn}$$

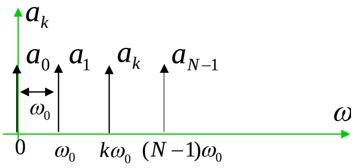
Defino $\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}}$ (0.81) Luego, $a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$

Para reconstruir la señal en el espacio del tiempo

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})\phi_k[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}\omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\boxed{x[n] = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega} \quad (0.82)$$



Bibliografía: Opp. 2.7, Pro 4.2

Ejercicios Opp: 2.72, 2.74

Convergencia de la TF

si $X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j\omega n}$ (0.83)

se define convergencia uniforme $\lim_{N\to\infty} \left| X(e^{j\omega}) - X_N(e^{j\omega}) \right| = 0$ (0.84)

$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ converge uniformemente si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$ (0.85)

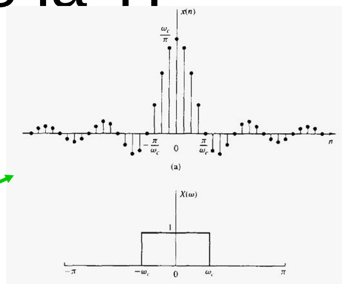
señales de energía finita $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$ (0.86)

convergencia cuadrática media $\lim_{N\to\infty} \int_{(2\pi)} \left| X(e^{j\omega}) - X_N(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega = 0$ (0.87)

Bibliografía: Pro 4.2

Convergencia de la TF

¡Pero para las señales de energía finita puede haber fenómenos de Gibbs en frecuencia!.

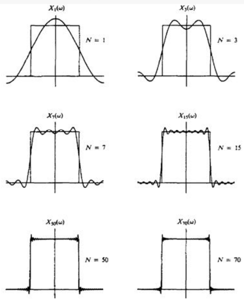


Ejemplo:

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases} \qquad x[n]=\frac{sen(w_c n)}{\pi n}$$

pero

$$x[n]=\frac{sen(w_c n)}{\pi n} \qquad X_N(\omega)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{sen(w_c n)}{\pi n}e^{-j\omega n}$$



La interpretación intuitiva es que $X_N(e^{j\omega})$ tiende a $X(e^{j\omega})$ salvo en un número finito de discontinuidades

Este hecho tendrá su importancia a la hora de diseñar filtros discretos.

Bibliografía: Pro 4.2

TF de señales periódicas

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) \qquad (0.88)$$

Ejemplo:

$$\cos(\omega_0 n) = \tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)$$

$$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0) \qquad -\pi \le \omega < \pi$$

En general

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0) \qquad (0.89)$$

Bibliografía: Pro 4.2

Ejercicios Opp: 2.17*

Propiedades de la TF

(0.90) Linealidad	$Ax[n]+By[n]$	$\longleftrightarrow$	$AX(e^{j\omega})+BY(e^{j\omega})$
(0.91) Desplazamiento en el tiempo	$x[n-n_0]$	$\longleftrightarrow$	$X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$
(0.92) Desplazamiento en frecuencia	$x[n]e^{j\omega_0 n}$	$\longleftrightarrow$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
(0.93) Conjugación	$x^*[n]$	$\longleftrightarrow$	$X^*(e^{-j\omega})$
(0.94) Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$\longleftrightarrow$	$X(e^{-j\omega})$
(0.95) Escalado en el tiempo	$x_m[n]=\begin{cases} x[n/m] & n=mk \\ 0 & resto \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$X(e^{jm\omega})$
(0.96) Convolución	$x[n]*y[n]$	$\longleftrightarrow$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
(0.97) Producto	$x[n]y[n]$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Bibliografía: Opp. 2.8, Pro. 4.3

Propiedades de la TF

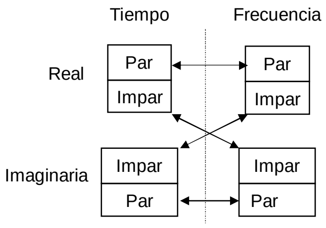
Diferencia finita $x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow \left(1-e^{-j\omega}\right)X(e^{j\omega})$ (0.98)

Integración $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$ (0.99)

$+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$ (0.100)

Diferenciación en frecuencia $nx[n] \longleftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ (0.101)

Simetrías



$x[n]$ es real $\longleftrightarrow$ $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ (0.102)

$x[n]$ es real y par $\longleftrightarrow$ $X(e^{j\omega})$ es real y par (0.103)

$x[n]$ es real e impar $\longleftrightarrow$ $X(e^{j\omega})$ es imaginaria pura e impar (0.104)

$x_e[n] \longleftrightarrow \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ (0.105)

$x_o[n] \longleftrightarrow \mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ (0.106)

Bibliografía: Opp. 2.8, Pro. 4.3

Propiedades de la TF

Teorema de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} \left| X(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \qquad (0.107)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega \qquad (0.108)$$

Bibliografía: Opp. 2.8, Pro. 4.3

Ejercicios Opp: 2.44*,2.49*, 2.65, 2.71, 2.73, 2.75, 2.76, 2.77, 2.78, 2.79

Algunas TFs

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{|a|<1} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad (0.109)$$

$$a^{|n|} \xleftrightarrow{|a|<1} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2} \qquad (0.110)$$

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{|a|<1} \left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)^2 \qquad (0.111)$$

$$\binom{n+r-1}{r-1} a^n u[n] \xleftrightarrow{|a|<1} \left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)^r \qquad (0.112)$$

$$\frac{\sin\left(\omega_p (n+1)\right)}{\sin \omega_p} a^n u[n] \xleftrightarrow{|a|<1} \frac{1}{1-2a\cos\omega_p e^{-j\omega} + a^2 e^{-2j\omega}} \qquad (0.113)$$

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \qquad (0.114)$$

Bibliografía: Opp I 5.6

Algunas TFs

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0) \qquad (0.115)$$

$$\cos(\omega_0 n+\alpha) \longleftrightarrow \pi e^{j\alpha}\delta(\omega-\omega_0)+\pi e^{-j\alpha}\delta(\omega+\omega_0) \qquad -\pi\le\omega<\pi \qquad (0.116)$$

$$\sin(\omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0) \qquad -\pi\le\omega<\pi \qquad (0.117)$$

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \qquad -\pi\le\omega<\pi \qquad (0.118)$$

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1 \qquad (0.119)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad -\pi\le\omega<\pi \qquad (0.120)$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN] \xleftrightarrow{\omega_0=\frac{2\pi}{N}} \omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0) \qquad (0.121)$$

Bibliografía: Opp I 5.6

Algunas TFs

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & resto\end{cases} \longleftrightarrow \frac{\sin\omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{\sin\omega\frac{1}{2}} \qquad (0.122)$$

$$x[n]=\begin{cases}1 & -N_1\le n\le N_2\\ 0 & resto\end{cases} \longleftrightarrow \frac{\sin\omega\left(\frac{1}{2}\left(N_1+N_2+1\right)\right)}{\sin\omega\frac{1}{2}}e^{-j\omega\frac{N_2-N_1}{2}} \qquad (0.123)$$

$$\frac{W}{\pi}\sin c\left(\frac{W}{\pi}n\right) \overset{0<W<\pi}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|\le W\\ 0 & resto\end{cases} \qquad -\pi\le\omega<\pi \qquad (0.124)$$

$$h[n]=\begin{cases}0 & n=0\\ \dfrac{\cos\pi n}{nT} & n\ne 0\end{cases} \longleftrightarrow X(e^{j\omega})=j\omega \qquad -\pi\le\omega<\pi \qquad (0.125)$$

Bibliografía: Opp I 5.6

Algunas TFs

Ejemplo: $x[n] = a^n u[n-5] = a^5 a^{n-5} u[n-5] \xleftrightarrow{|a|<1} \dfrac{a^5 e^{-j5\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{|a|<1} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad (0.126)$$

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \qquad (0.127)$$

Ejemplo: $\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})} = \dfrac{a}{a-b}\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})} - \dfrac{b}{a-b}\dfrac{1}{(1-be^{-j\omega})}$

$$x[n] = \frac{a}{a-b}a^n u[n] - \frac{b}{a-b}b^n u[n]$$

Bibliografía: Opp I 5.6

Ejercicios Opp: 2.46

Dualidad de la TF

	Tiempo continuo		Tiempo discreto	
	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Series de Fourier	Periódica en el tiempo. Tiempo continuo $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	No periódica en frecuencia. Frecuencia discreta $a_k=\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)e^{-jk\omega_0 t}$	Periódica en el tiempo. Tiempo discreto $x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$	Periódica en frecuencia. Frecuencia discreta $a_k=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$
Transformada de Fourier	No periódica en el tiempo. Tiempo continuo $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$	No periódica en frecuencia. Frecuencia continua $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	No periódica en el tiempo. Tiempo discreto $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	Periódica en frecuencia. Frecuencia continua $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

(0.128)

Bibliografía: Pro. 4.2, Opp I 5.7

Caracterización en frecuencia de un sistema LTI

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z_0^k h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{n-k}=z_0^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{-k}=z_0^n H(z_0)$$

$$x[n]=z_0^n \qquad (0.46)$$

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n]=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n \qquad (0.47)$$

$$H(z_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{-k}$$

La respuesta en frecuencia a un sistema es
la transformada de Fourier de la respuesta impulsional

Caracterización en frecuencia de un sistema LTI

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow y[n] = e^{j\omega_0 n} * h[n] = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) \qquad (0.131)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \longrightarrow y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \qquad (0.132)$$

Ejemplo: $x[n] = \cos(\omega_0 n + \alpha) = \frac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n}$

$$y[n] = \tfrac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + \tfrac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n} H(e^{-j\omega_0}) =$$
$$= \tfrac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + \tfrac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n} H^*(e^{j\omega_0}) =$$
$$= \left|H(e^{j\omega_0})\right| \left(\tfrac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} e^{j\sphericalangle H(e^{j\omega_0})} + \tfrac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\sphericalangle H(e^{j\omega_0})} \right) =$$
$$= \left|H(e^{j\omega_0})\right| \cos\left(\omega_0 n + \alpha + \sphericalangle H(e^{j\omega_0})\right)$$

Bibliografía: Opp. 2.6, Pro. 4.4

Ejercicios Opp: 2.6, 2.11*, 2.32, 2.33*, 2.41, 2.45, 2.48, 2.51, 2.52, 2.53, 2.54, 2.57, 2.69

Caracterización en frecuencia de un sistema definido por una ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k Y(e^{j\omega})e^{-jk\omega} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(e^{j\omega})e^{-jk\omega} \qquad (0.129)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}} \qquad (0.130)$$

Ejemplo: $y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$

$$Y(e^{j\omega}) - \tfrac{3}{4} Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \tfrac{1}{8} Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} = 2X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})\left(1 - \tfrac{3}{4} e^{-j\omega} + \tfrac{1}{8} e^{-j2\omega}\right) = 2X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$h[n] = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Bibliografía: Opp. 2.5, Pro. 4.4

Ejercicios Opp: 2.8*, 2.9, (2.34*), 2.42, 2.47, 2.64, 2.66, 2.67, 2.70

Régimen estacionario y transitorio

Ejemplo régimen estacionario:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow y[n] = e^{j\omega_0 n} * h[n] = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

Ejemplo régimen transitorio:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] \longrightarrow y[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] * h[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] \left(\sum_{k=0}^{n} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) =$$

$$= e^{j\omega_0 n} u[n] \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) =$$

$$= e^{j\omega_0 n} u[n] \left(\underbrace{H(e^{j\omega_0})}_{\substack{\text{Régimen} \\ \text{estacionario} \\ \text{(steady state)}}} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}}_{\substack{\text{Régimen} \\ \text{transitorio}}} \right) = y_{ss}[n] + y_t[n]$$

Bibliografía: Pro. 4.4, Opp 2.6

Ejercicios Opp: 2.40

Ejercicios Pro: 2.9

Régimen estacionario y transitorio

Ejemplo régimen transitorio:

$$y_t[n] = e^{j\omega_0 n}u[n]\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k}$$

$$|y_t[n]| = \left| e^{j\omega_0 n}u[n]\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|$$

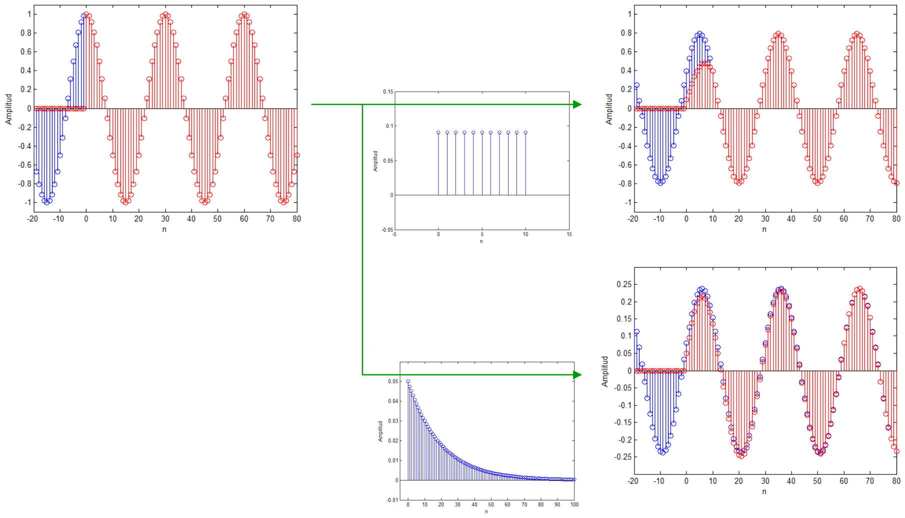
Si h[n] es un sistema FIR, entonces $\exists n_0 | y_t[n] = 0 \quad \forall n > n_0$

Si h[n] es un sistema IIR, entonces

Es decir, la respuesta está acotada si el sistema es estable. Y el transitorio tiende a 0 si la respuesta al impulso tiende a 0 con n

Bibliografía: Pro. 4.4

Régimen estacionario y transitorio



Bibliografía: Pro. 4.4

Procesos estocásticos

Supondremos que cada x[n] es es resultado de una variable aleatoria x_n con $p_{x_n}(x,n)$

A menudo es útil caracterizar una v.a por promedios:

Media

$$m_{x_n} = E\{x_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{x_n}(x,n)dx$$

$$m_{x_n} = E\{x_n\} = \sum_x x p_{x_n}(x,n)$$

$$E\{x_n + y_m\} = E\{x_n\} + E\{y_m\}$$

$$E\{ax_n\} = aE\{x_n\}$$

Correlación y Autocorrelación

$$\phi_{xx}[n,n+m] = E\{x_n, x_{n+m}\}$$

$$\phi_{xy}[n,n+m] = E\{x_n, y_{n+m}\}$$

Para una señal determinista

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m] = x[-m] * x[m]$$

Procesos estacionarios

$$m_{x_n} = m_x$$

$$\phi_{xx}[n,n+m] = \phi_{xx}[m]$$

$$\phi_{xy}[m] = \phi_{yx}[-m] \quad \Rightarrow \quad \phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$$

Bibliografía: Opp. 2.10, Opp. A, Pro. 2.6, Pro. A

Ejercicios Opp: 2.59

Procesos estocásticos y Sistemas LTI

$$\boxed{E\{y[n]\}} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]E\{x[n-k]\} = E\{x[n]\}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = \boxed{E\{x[n]\}H(e^{j0})}$$

(0.139)

LTI — x estacionario

$$\boxed{\phi_{yy}[n,n+m]} = E\{y[n]y[n+m]\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]h[r]x[n-k]x[n-r+m]\right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]E\{x[n-k]x[n-r+m]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\phi_{xx}[m+k-r] =$$

x estacionario

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\phi_{xx}[m-l]\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[l+k] =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\phi_{xx}[m-l]\phi_{hh}[l] = \boxed{\phi_{xx}[m]*\phi_{hh}[m]}$$, luego y es también estacionaria (0.140)

Bibliografía: Opp. 2.10, Opp. A, Pro. 2.6, Pro. A

Procesos estocásticos y Sistemas LTI

$$\phi_{hh}[m] = h[-m] * h[m] \quad \Rightarrow \quad \Phi_{hh}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

$$\boxed{\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega})} \qquad \boxed{\cancel{\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega})}}$$

(0.141) (0.142)

$$E\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega \quad (0.143)$$

$\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ es una función no negativa, real, y par (0.144)

Ejemplo: Si es un filtro paso banda

$$E\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_h}^{-\omega_l} \Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_l}^{\omega_h} \Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega = 2\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_l}^{\omega_h} \Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega$$

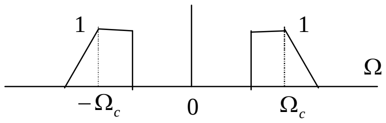
Bibliografía: Opp. 2.10, Opp. A, Pro. 2.6, Pro. A

Ejercicios Opp: 2.80*,2.81*, 2.82, 2.83*, 2.84, 2.85, 2.86, 2.87, 2.88, 2.89, 2.90, 2.91

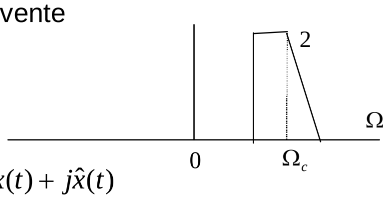
Ejercicios Pro: 2.62

Señales paso banda

$X(j\Omega)$



Señal analítica o pre-envolvente



(0.145) $X_+(j\Omega) = 2X(j\Omega)u(j\Omega)$

(0.146) $x_+(t) = \left(\delta(t) + j\tfrac{1}{\pi t}\right) * x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

Transformada de Hilbert

(0.147) $\hat{x}(t) = \tfrac{1}{\pi t} * x(t) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$

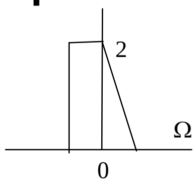
(0.148) $\hat{X}(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} j & \Omega < 0 \\ 0 & \Omega = 0 \\ -j & \Omega > 0 \end{cases}$$ (0.149)

Bibliografía: Pro. 9.1

Señales paso banda

Señal equivalente paso bajo



(0.150) $X_l(j\Omega) = X_+(j(\Omega + \Omega_c))$

(0.151) $X(j\Omega) = \frac{1}{2} X_l^*(-j(\Omega - \Omega_c)) + \frac{1}{2} X_l(j(\Omega - \Omega_c))$

Componente en fase

Componente en cuadratura

(0.152) $x_l(t) = x_+(t)e^{j\Omega_c t} = x_c(t) + jx_s(t) = a(t)e^{j\theta(t)}$

Fase

Envolvente

(0.153) $x(t) = x_c(t)\cos\Omega_c t - x_s(t)\sin\Omega_c t = a(t)\cos(\Omega_c t + \theta(t)) = \mathrm{Re}\{x_l(t)e^{j\Omega_c t}\}$

(0.154) $\hat{x}(t) = x_c(t)\cos\Omega_c t + x_s(t)\sin\Omega_c t = a(t)\sin(\Omega_c t + \theta(t)) = \mathrm{Im}\{x_l(t)e^{j\Omega_c t}\}$

Bibliografía: Pro. 9.1

Ejercicios Opp: 2.58

Ejercicios Pro: 9.3*

Apéndice I: Relaciones trigonométricas

$$e^{jz} = \cos z + j\sin z \qquad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

$$\cos 2z = 1 - 2\sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = \frac{1 - \tan^2 z}{1 + \tan^2 z}$$

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z = \frac{2\tan z}{1 + \tan^2 z}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\tfrac{a+b}{2}\cos\tfrac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\tfrac{a+b}{2}\cos\tfrac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$\sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a-b) + \tfrac{1}{2}\sin(a+b)$$

Bibliografía: Formulario CRC

Apéndice II:
Partial Fraction Expansion

$$\boxed{G(z)} = \frac{b_{n-1}z^{-(n-1)} + b_{n-2}z^{-(n-2)} + ... + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1}z^{-(n-1)} + ... + a_1 z^{-1} + 1} =$$

$$= \frac{b_{n-1}z^{-(n-1)} + b_{n-2}z^{-(n-2)} + ... + b_1 z^{-1} + b_0}{(1 - z_1 z^{-1})^{m_1}(1 - z_2 z^{-1})^{m_2}...(1 - z_P z^{-1})^{m_P}} = \boxed{\sum_{p=1}^{P}\sum_{m=1}^{m_p}\frac{K_{pm}}{(1 - z_p z^{-1})^m}}$$

donde

$$K_{pm} = \frac{1}{(m_p - m)!}(-z_p)^{-(m_p - m)}\frac{d^{(m_p - m)}}{dz^{-(m_p - m)}}\left((1 - z_p z^{-1})^{m_p} G(z)\right)\Big|_{z=z_p}$$

Bibliografía: Opp I Apéndice

Apéndice II:
Partial Fraction Expansion

Ejemplo: $H(z)=\dfrac{2}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\dfrac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}=\dfrac{K_{11}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}+\dfrac{K_{21}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$

$$K_{11}=\left((1-\tfrac{1}{2}z^{-1})H(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}\Big|_{z=\frac{1}{2}}=4$$

$$K_{21}=\left((1-\tfrac{1}{4}z^{-1})H(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Big|_{z=\frac{1}{4}}=-2$$

$$H(z)=\frac{4}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}-\frac{2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$h[n]=4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Bibliografía: Opp I Apéndice

Apéndice II: Partial Fraction Expansion

Ejemplo: $Y(e^{j\omega}) = \dfrac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} = \dfrac{K_{11}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \dfrac{K_{21}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} + \dfrac{K_{22}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$

$$K_{11} = \left((1-\tfrac{1}{2}z^{-1})H(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = 8$$

$$K_{22} = \left((1-\tfrac{1}{4}z^{-1})^2 H(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Big|_{z=\frac{1}{4}} = -2$$

$$K_{21} = \frac{1}{(2-1)!}\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{-1}\left(\frac{d}{dz^{-1}}(1-\tfrac{1}{4}z^{-1})^2 H(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = -4\left(\frac{d}{dz^{-1}}\frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}} =$$

$$= -4\left(-\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = -4$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{8}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} - \frac{4}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$$y[n] = \left(8\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 4\left(\tfrac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right)u[n]$$

Bibliografía: Opp I Apéndice

Apéndice II:
Partial Fraction Expansion

Ejemplo: $H(e^{j\omega})=\dfrac{1+3e^{-j\omega}+\frac{11}{6}e^{-j2\omega}+\frac{1}{3}e^{-j3\omega}}{1+\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}=c_0+c_1e^{-j\omega}+\dfrac{d_0+d_1e^{-j\omega}}{1+\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$

$$1+3e^{-j\omega}+\tfrac{11}{6}e^{-j2\omega}+\tfrac{1}{3}e^{-j3\omega}=(c_0+d_0)+(\tfrac{5}{6}c_0+c_1+d_1)e^{-j\omega}+(\tfrac{1}{6}c_0+\tfrac{5}{6}c_1)e^{-j2\omega}+\tfrac{1}{6}c_1e^{-j3\omega}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ \frac{5}{6} & 1 & 0 & 1\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ d_0\\ d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ \frac{11}{6}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ d_0\\ d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$H(e^{j\omega})=1+2e^{-j\omega}+\frac{0+\frac{1}{6}e^{-j\omega}}{1+\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}=1+2e^{-j\omega}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\left(\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right)u[n]$$

Bibliografía: Opp I Apéndice

Apéndice III: Miscelánea

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$$

Textos

- Cohen2005: The history of noise